Data la rappresentazione di un segnale sinusoidale nel tempo nella seguente forma:

$$\boxed{v(t) = V_M \text{ sen } (\omega t + \varphi)}$$

Definiamo:

- il **valore massimo V_M**, detto anche **ampiezza** della sinusoide; essendo una grandezza alternata, il valore massimo positivo e quello negativo coincidono in valore assoluto;

$$\boxed{V_{Eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}} \quad \boxed{V_M = \sqrt{2}V_{Eff}}$$

- la **pulsazione ω** della sinusoide, espressa in radianti al secondo (rad/s), dato che il prodotto ωt, essendo un addendo dell'argomento del seno, deve essere espresso in radianti; in realtà il radiante è adimensionato e quindi la pulsazione si esprime in secondi alla meno uno;

$$\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}} \quad \boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}} \quad \boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

- la **fase iniziale φ** della sinusoide, espressa in radianti, e legata al valore iniziale di v dalla relazione che si ottiene ponendo $t = 0$ nella forma su riportata.

Esempio:
- se conosco il valore efficace ($V_{Eff} = 5$ **Volt**);
- la frequenza ($f = 50$ **Hz**);
- la fase iniziale ($\varphi = 90°$).

posso scrivere la forma sinusoidale della tensione calcolando:
- $V_M = \sqrt{2}V_{Eff} = \sqrt{2}5 = 7{,}071$ **Volt;**
- $\omega = 2\pi f = 2\pi 50 = 314$ **rad/sec;**

Per cui avrò: ***v(t) = 7,07 sen (314t + 90°)***

Viceversa data la tensione in forma sinusoidale: ***v(t) = 10 sen (628t + 60°)***
riesco a calcolare i valori di Ampiezza massima, Valore efficace, Frequenza, Pulsazione, Periodo e fase iniziale in questo modo:
V_M = 10 Volt; ω = 628 rad/sec; $\varphi = 60°$; sono immediati e si leggono dalla forma sinusoidale.

$$V_{Eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7{,}07 \text{ Volt}; \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{628}{6{,}28} \cong 100 \text{ Hz};$$

Risulta interessante capire come poter rappresentare un segnale sinusoidale (espresso nel dominio del tempo) in forme che diano l'opportunità di eseguire calcoli (quali somme tra tensioni, prodotto tra tensione e corrente, etc) in maniera semplificata. Esistono per questo scopo diverse possibilità ed in particolare noi focalizzeremo l'attenzione nella rappresentazione nel campo dei numeri complessi ovvero nel piano di Gauss.

RICHIAMO SUI NUMERI COMPLESSI

Si chiama numero complesso ogni espressione che si presenta nella forma: **(a + ib)**

dove a e b sono numeri reali mentre la lettera i, che si chiama **unità immaginaria**, gode per definizione della seguente proprietà: $\mathbf{i^2 = -1}$

L'espressione a + ib rappresenta la forma algebrica del numero complesso; il primo termine **a** si chiama *parte reale* del numero complesso, mentre il secondo termine **ib** si chiama *parte immaginaria* e **b** rappresenta il *coefficiente dell'immaginario*.

- Il numero $\sqrt{a^2+b^2}$ si chiama **modulo** del numero complesso a+ ib e si indica con | a + ib |

Le operazioni con i numeri complessi seguono le stesse modalità del calcolo algebrico, tenendo comunque sempre presente che $\mathbf{i^2 = -1}$

- **Forma trigonometrica dei numeri complessi**

Posto $a = \rho\cos\vartheta$ e $b = \rho sen\vartheta$, il numero complesso z=a+ib si può scrivere
$z = \rho(\cos\vartheta + isen\vartheta)$
dove ϑ si chiama argomento (fase) e $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ rappresenta il modulo o raggio vettore del numero complesso (Nel grafico il modulo è la lunghezza del vettore.
Inoltre si ricava $tag\vartheta = \frac{b}{a}$ da cui $\vartheta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

ESEMPIO 1

Trasformare il numero complesso $\sqrt{3}+i$ in forma trigonometrica.

Avremo

$a = \sqrt{3}$
$b = 1$

$r = 2$

$tag\vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ da cui $\vartheta = 30°$

ESEMPIO 2

Trasformare il numero complesso

$z = 2(\cos 60° + isen60°)$ in forma algebrica.

Avremo: $a = 2\cos 60° = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

$b = 2sen60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

e quindi $z = 1 + i\sqrt{3}$

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI

Ogni numero complesso a + ib si può rappresentare in un sistema di assi ortogonali xOy , con x asse reale e y asse immaginario, attraverso le coordinate (a , b). Questo piano cartesiano si chiama **piano di Gauss**.
Riportato nel piano di Gauss il punto P(a, b), il vettore $\overrightarrow{OP}$ rappresenterà geometricamente il numero complesso $z = a + bi$. Con i vettori, applicando la regola del parallelogrammo, possiamo sommare o sottrarre i numeri complessi rappresentati nel piano.

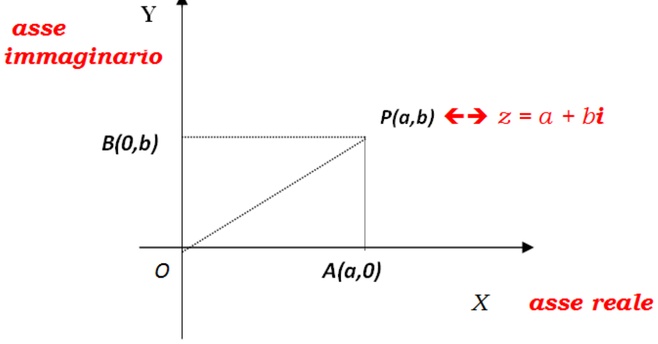


Figura 1

LE OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

Forma algebrica
Le operazioni seguono le stesse modalità del calcolo algebrico, tenendo sempre presente che $\mathbf{i^2 = -1}$

Forma trigonometrica
Dati $z_1 = r_1(\cos\vartheta_1 + i sen\vartheta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\vartheta_2 + i sen\vartheta_2)$, si avrà:

Prodotto: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i sen(\vartheta_1 + \vartheta_2)]$

Divisione: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i sen(\vartheta_1 - \vartheta_2)]$

Non è opportuno eseguire addizioni o sottrazioni con numeri complessi dati in questa forma essendo molto più semplice eseguire le stesse operazioni con i numeri trasformati in forma algebrica.

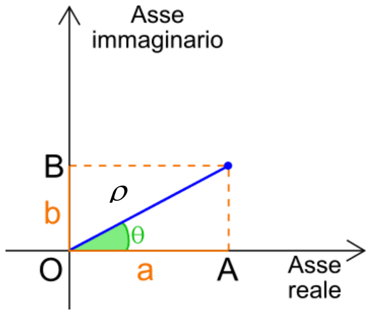
TRASFORMARE LA TENSIONE DATA IN FORMA SINUSOIDALE NEL TEMPO IN UN NUMERO COMPLESSO

Data la tensione in forma sinusoidale: ***v(t) = 9 sen (628t + 120°)***

è immediato ricavare: V_M = 10 Volt; ω = 628 rad/sec; $\varphi = 60°$;

- $V_{Eff} = \dfrac{V_M}{\sqrt{2}} = \dfrac{9}{\sqrt{2}} = 6{,}36V = \rho$ questo valore sarà il modulo del numero complesso;
- mentre la fase corrisponde all'argomento ϑ del numero complesso; ovvero $\vartheta = \varphi = 120°$

Conoscendo il modulo e l'argomento sono già in grado di rappresentare questo numero nel piano di Gauss tramite un vettore che parte dall'origine che forma un angolo ϑ (preso in senso anti-orario) con l'asse dei numeri reali (asse x) che sia di lunghezza pari al modulo ρ che, ricordiamo ancora, coincide con il valore efficace V_{Eff}.



Se volessi però capire le coordinate della punta del vettore avrei bisogno di convertire il numero complesso da forma polare (modulo e argomento) alla forma algebrica z=a+jb dove a è la parte reale del numero z (coordinata x) e b è la parte immaginaria (coordinata y).

Nel caso generale abbiamo visto che:
$z = \rho(\cos\vartheta + i sen\vartheta)$ ovvero: $a = \rho(\cos\vartheta)$; $b = \rho(sen\vartheta)$;

Per cui nel caso in esempio:
- $a = \rho(\cos\vartheta) = 6{,}36\cos(120°) = -3{,}18$; **parte reale della tensione**
- $b = \rho(sen\vartheta) = 6{,}36 sen(120°) = 5{,}51$; **parte immaginaria della tensione**

Per tanto risulta: $\overline{V}$=(-3,18 + j5,51);

PASSARE DA UNA TENSIONE ESPRESSA IN CAMPO COMPLESSO AD UNA NEL REGIME SINUSOIDALE (NEL TEMPO).

Partiamo da un esempio: Data la tensione rappresentata dal numero complesso $\overline{\boldsymbol{V}}$**=(3 -j4)** calcolare la sua espressione sinusoidale nel tempo sapendo che la frequenza è di 100Hz.

Per poter scrivere la forma sinusoidale **v(t) = V_M sen (ωt+ φ)** ho bisogno di calcolare V_M, ω e φ.

- **V_M** è legato al valore efficace della tensione tramite la relazione $V_M = \sqrt{2}V_{Eff}$
- **ω** è legato alla frequenza tramite la relazione: $\omega = 2\pi f$
- **φ** coincide numericamente con l'argomento: $\varphi = \vartheta$

Data la tensione : $\overline{\boldsymbol{V}}$=(3 -j4)

- il modulo vale $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 = V_{Eff}$
- Mentre la fase sarà $\vartheta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) = -53{,}13°$
- $V_M = \sqrt{2}V_{Eff} = \sqrt{2}5 = 7{,}07$
- $\omega = 2\pi f = 2\pi 100 = 628 rad/s$
- $\varphi = \vartheta = -53{,}13°$
- **v(t) = V_M sen (ωt+ φ) => v(t) = 7,07 sen (628t - 53,13°)**